第 6 章　机械波

一　波动方程求解

1. 波动方程

· 波动方程最基础的形式为

波动方程

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

① **波速** u：振动传播的速度

波长 λ：相位差为 2π（运动完全相同）的两个质点之间的距离

② 此方程的波是沿 x 轴正向传播的，若是负向传播，要将 x 改成 $-x$

③ 代入 x 后，波动方程成为该处质点的**振动方程**，即 $y-t$ 振动图象

代入 t 后，波动方程成为该时刻的**波形**，即 $y-x$ 波形图

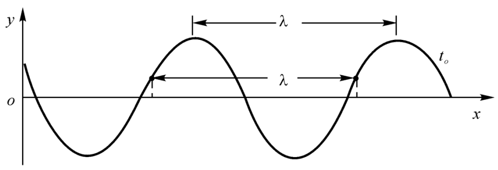
波动参数核心关系

$$u=\frac{\lambda}{T}$$

· 根据 $\lambda=u\cdot T$ 、$2\pi=\omega\cdot T$ 以及 $T\nu=1$，波动方程还有另外几种形式：

1	2	3
$y(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi)$	$y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$	$y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$

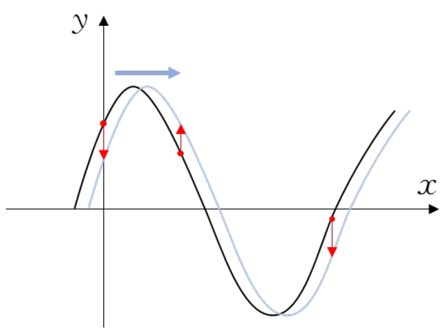
2. 机械波波形图 $y-x$



波形图能够得到：振幅 A 、波长 λ，特定点当前的位移（经过处理可得到初相位 φ ）

若已知波的传播方向，可以得到该时刻各点的振动方向（也就是振动速度的正负）

方法：将波形往传播方向稍微平移一小段，然后比较两条曲线在同一横坐标的点的高度



关于题目

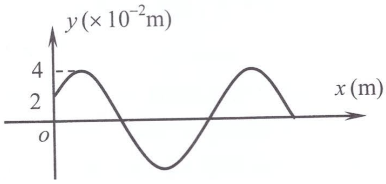
· 常见题型：提供波动的相关参数及波形图（也有可能是振动图），要求得到波动表达式、振动方程等

· 解题思路：收集题给信息中的参数，根据已知参数选择合适的表达式，求出剩余参数

例 1　（20–21，2）已知一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，波长 $\lambda=3\text{m}$，周期 $T=4\text{s}$，$t=0$ 时刻的波形图如图所示。求：

（1）o 点处质点的振动表达式；

（2）该波的波动表达式。



解　（1）$\because\ T=4\text{s}\quad \therefore\ \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}\text{rad/s}$

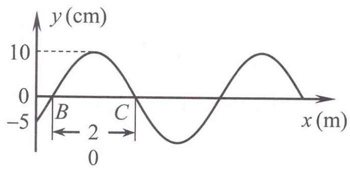
由波形图可得：① $A=0.04\text{m}$　② $t=0$ 时 $y=A\cos\varphi=0.02\text{m}$ → 解得 $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$

③ 结合波沿 x 轴正向传播 → $v_0<0$ → $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$　因此 $y=0.04\cos(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{3})$

（2）$\because\ \lambda=3\text{m}\quad \therefore\ u=\dfrac{\lambda}{T}=0.75\text{m/s}$　现在已经得到 u、ω 和 φ，使用最原始的表达式

$$y=0.04\cos[\frac{\pi}{2}(t-\frac{4}{3}x)+\frac{\pi}{3}]$$

例 2　（17–18，4）已知一沿 x 轴正向传播的平面余弦波，$t=1/3\text{s}$ 的波形图如图所示，且周期 $T=2\text{s}$。求：（1）原点的振动方程；（2）该波的表达式；（3）C 点离原点的距离



解　$\because\ T=2\text{s}\quad \therefore\ \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi\ \text{rad/s}$

读图可得：① $A=10\text{cm}$　② $\lambda/2=2\text{m}$ → $\lambda=4\text{m}$

③ $y(0,1/3\text{s})=A\cos(\dfrac{1}{3}\omega+\varphi)=-5\text{cm}$ → $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\pm\dfrac{2}{3}\pi$

结合正向传播 → $v<0$ → 取 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$ → $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

（1）结合以上分析，原点的振动方程为 $y=10\cos(\pi t+\dfrac{\pi}{3})(\text{cm})$

（2）由 $\lambda=4\text{m}$，$T=2\text{s}$ → $u=\dfrac{\lambda}{T}=2\text{m/s}$ → $y=10\cos[\pi(t-\dfrac{x}{2})+\dfrac{\pi}{3}]$ (cm)

（3）由图像可得，$t=1/3\text{s}$ 时 $y_C=10\cos[\pi(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x_C}{2})+\dfrac{\pi}{3}]=0$，且 $v_C>0$

根据第 5 章相关结论，此时的相位应该是 $\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ → $\pi(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x_C}{2})+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$

解得 $x_C=-\dfrac{5}{3}+2k\,(\text{m})$，根据图像，$\dfrac{\lambda}{2}<x_C<\lambda$，因此 $x_C=\dfrac{7}{3}\text{m}$

易错点：初相位

· **已知 t 时刻点 x 的位移，求初相位**

① 代入数据，解出两组含 k 的 φ，再推断出当前时刻的速度正负，选取合适的一组

（也可以先根据位移和速度特征得到对应的相位，然后解出一组 φ）

② 取合适的 k 使 φ 位于 $-\pi\sim\pi$ 之间

- **求特定点位置**:

  同样是得到位移和速度特征，得到相位（含 k ），然后列方程解出 x

  但要注意此时得到的 x 是含 k 的，也就是满足该特征的点有无数个

  要根据图中这个点的位置范围（比如可看出和原点的距离在几～几个波长之间）确定 k

二　波的能量

1.能量密度

- 机械波传播介质具有的能量同样也是时间和位置的函数，随周期变化，我们关注变化的平均值

机械波能量密度

$$\boxed{\overline{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2}$$

- 若机械波沿一条线传播，则 ρ 改为质量**线密度** μ ，否则机械波在整个空间内传播， ρ 为**体密度**

2.能流密度

- 单位时间内通过单位面积的波的能量

能流密度

$$\boxed{I=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u}$$

例 1　（20—21，4）一平面简谐波在介质中传播，振幅为 A_0 ，波的强度（平均能流密度）为 I_0 ；如该波的振幅减半，则波的强度将变为________。

解　根据能流密度公式 $I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$ ： $I_0=\frac{1}{2}\rho A_0^2\omega^2 u$

则振幅减半： $I=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_0}{2}\right)^2\omega^2 u=\frac{1}{4}\frac{1}{2}\rho A_0^2\omega^2 u=\frac{1}{4}I_0$

3.球面简谐波

- 由点波源向四面八方均匀传输能量（各向同性均匀介质）形成的波
- 设点波源平均输出功率 P_0 ，振幅 A_0 ，则距波源 r 处球面的能流密度与振幅为

球面波　能流密度

$$\boxed{I=\frac{P_0}{4\pi r^2}}$$

球面波振幅

$$\boxed{A=\frac{A_0}{r}}$$

例 2　（16—17，4）一球面波在各向同性均匀介质中传播，已知波源的功率为 100W，若介质不吸收能量，则距波源 10m 处的波的平均能流密度为__________。

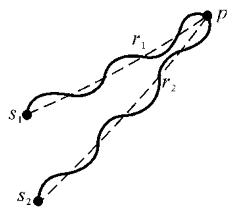
解　$I=\frac{P_0}{4\pi r^2}=\frac{100\text{W}}{4\times3.14\times10^2\text{m}^2}=7.96\times10^{-2}\text{W/m}^2$

三 波的合成与干涉

1. 基本原理

- 几列波在同一媒质中传播时，每列波**不受其它波影响**，各自保持原有特性沿原来的方向传播
- 质点受到多个波的作用时，产生的振动是各个波单独存在时产生的振动的叠加

2. 波的干涉



- 条件：两个**频率相同**、**振动方向相同**、**相位差恒定**的波源

  现象：在各点引起的振动振幅虽然各不相同，但不随时间变化

  设两个波源的振动方程 $\begin{cases} y_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$，点 p 与 s_1 距离为 r_1，与 s_2 距离为 r_2

  则在 p 点引起的振动振幅

波干涉

$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$ 其中 $\boxed{\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}$

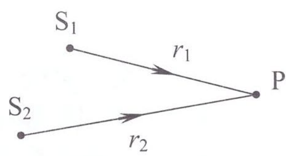
- 结果：在一些特定的位置：

波干涉结论

$\Delta\varphi=2k\pi \rightarrow A=A_1+A_2$ **振动始终加强**

$\Delta\varphi=(2k+1)\pi \rightarrow A=|A_1-A_2|$ **振动始终减弱（干涉相消）**

例 1 （18–19，7）如图所示，S_1、S_2 为两平面简谐波相干波源，S_2 的相位比 S_1 的相位超前 $\pi/4$，波长 $\lambda=16.0\text{m}$，$r_1=12.0\text{m}$，$r_2=14.0\text{m}$，S_1 在 P 点引起的振动振幅为 0.30m，S_2 在 P 点引起的振动振幅为 0.20m，则 P 点合振动的振幅为__________。



解 由题意，$\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\Delta\varphi=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2\pi}{16.0\text{m}}(14.0\text{m}-12.0\text{m})=0 \rightarrow A=A_1+A_2=0.5\text{m}$

例 2 （12–13，7）S_1、S_2 为振动频率、振动方向均相同的两个点波源，振动方向垂直纸面，两者相距 $3\lambda/2$（λ 为波长），如图。已知 S_1 的初相为 $\pi/2$。（1）若使射线 S_2C 上各点由两列波引起的振动均干涉相消，则 S_2 的初相位应为____________。（2）若使 S_1S_2 连线的中垂线 MN 上各点由两列波引起的振动均干涉相消，则 S_2 的初相位应为____________。

解 （1）射线 S_2C 上各点的路程差均为 S_1S_2 即 $3\lambda/2$；要求干涉相消，要求相位差 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{3}{2}\lambda)=\varphi_2-\frac{\pi}{2}-3\pi=(2k+1)\pi\text{，解得 }\varphi_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi\text{，取 }\varphi_2=\frac{\pi}{2}$$

（2）MN 上各点到 S_1 和 S_2 的距离都相等，因此相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\varphi_2-\dfrac{\pi}{2}=(2k+1)\pi$

解得 $\varphi_2=\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$，取 $\varphi_2=\dfrac{3}{2}\pi$

四　驻波

1.概念

① **驻波**：两列**振幅相等**、沿**相反方向**传播的**相干波**叠加形成的波（可以是**入射波**和**反射波**）

· 特点：各点的振幅各不相同，从而存在波腹（振幅最大）和波节（振幅为 0），相邻波节距离 $\lambda/2$

相邻两波节间的各点同时到达最大位移（或最小位移），波节两侧的相位相反（相差 π）

② **半波损失**

· 若波由波疏介质传入波密介质，或产生反射的点是**固定端**（无位移）

则反射波要**额外多出相位** π，即 $\lambda/2$ 的波长损失

2.基本模型

常见设问方式　已知入射波方程为 $y_1 = A\cos(\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_1)$，在 x_P 处产生反射

① **求反射波方程**

· **设反射波方程的一般形式**：将原方程中的 x 改成 $-x$，再在 cos 内加上一个未知数 φ_2

反射波方程

$$y_2 = A\cos(\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_2)$$

· **确认反射点的特征解出** φ_2（固定端 or 自由端）：

若是**固定端**，则 $(\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda}x_P + \varphi_2) - (\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x_P) = (2k+1)\pi$

若是**自由端**，则 $(\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda}x_P + \varphi_2) - (\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x_P) = 2k\pi$

其中 k 为整数，解出一个 φ_2，代回方程即得到 y_2

② **求驻波方程**

· 可以**直接代入**以下方程（利用了公式 $\cos(A-B)+\cos(A+B) = 2\cos A\cos B$）

驻波方程

$$y_1 + y_2 = 2A\cos(\pm\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$$

③ **求波腹、波节位置**

· 令驻波方程中的 $\cos(\pm\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})$ 中的相位为特定值（其中 n 为整数）

波腹方程	波节方程
$\pm\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = n\pi$	$\pm\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = (n+\frac{1}{2})\pi$

· 若题目限制了 x 的取值，则要注意逐一列出所有符合要求的 x

例 1 （19—20，3）设绳上传播的入射波方程为 $y_1 = A\cos(\omega t + 2\pi x/\lambda)$，入射波在 $x=\lambda/8$ 处反射，反射端为固定端。设反射波不衰减，试求：（1）反射波的方程；（2）驻波方程；（3）位于 $x=0$ 到 $x=2\lambda$ 之间的波节位置

解 （1）设反射波方程 $y_2 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)$，因为反射点 $x_P = \lambda/8$ 为固定端：

$(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_P + \varphi) - (\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x_P) = \frac{4\pi}{\lambda}x_P + \varphi = (2k+1)\pi$，解得 $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$，取 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

所以 $y_2 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})$

（2）代入驻波方程：$y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\varphi}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}) = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{4})\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$

（3）波节 → 令 $\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{4} = (n+\frac{1}{2})\pi$ → $x = \frac{4n+1}{8}\lambda$

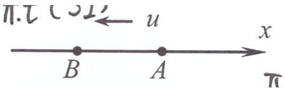
由于 $0 \le x \le 2\lambda$，因此 $0 \le n \le \frac{15}{4}$，即 n 只能取 0,1,2,3，因此 $x = \frac{\lambda}{8}, \frac{5\lambda}{8}, \frac{9\lambda}{8}, \frac{13\lambda}{8}$

例 2 （20—21，5）已知一驻波的表达式为 $y = 0.02\cos(20x)\cos(750t)$(SI)，则形成此驻波的两行波的振幅为________m、波速为________m/s。

解 根据驻波方程 $y_1 + y_2 = 2A\cos(\pm\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$，对比就能得到

$2A = 0.02$，$\frac{2\pi}{\lambda} = 20$，$\omega = 750$，因此第一空振幅 $A = 0.01$，第二空 $u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\cdot\omega}{2\pi} = \frac{750}{20} = 37.5$

例 3 （16—17，2）如图，一平面余弦波以波速 $u = 20$m/s 沿 x 轴负方向传播，此波引起 A 点的振动方程为 $y = 3.0\cos 4\pi t$(SI)。（1）若以距 A 点 5.0m 处的 B 点为坐标原点，写出此波的振动方程；（2）若 B 处有波密的反射壁，求反射波的波动方程；（3）求合成驻波方程，以及 A、B 两点之间的波腹位置。



解 （1）由于波沿负方向传播，所以设波动方程 $y_1 = A\cos(\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_1)$

当代入 $x = 5.0$m 后，波动方程应当成为 A 点的振动方程：

$$y_1 = A\cos(\omega(t + \frac{5}{u}) + \varphi_1) = 3.0\cos 4\pi t$$

因此 $A = 3.0$m，$\omega(t + \frac{5}{u}) + \varphi_1 = 4\pi t$ → $\omega = 4\pi$，代入 $u = 20$m/s 得 $\varphi_1 = -\pi$

因此波动方程 $y_1 = 3.0\cos(4\pi(t + \frac{x}{20}) - \pi) = 3.0\cos(4\pi t + \frac{\pi}{5}x - \pi)$

（2）设反射波方程 $y_2 = 3.0\cos(4\pi t - \frac{\pi}{5}x + \varphi_2)$

B 处波密反射壁说明此处反射发生半波损失，等效于 B 为固定端

因此 $(4\pi t - \frac{\pi}{5}x + \varphi_2) - (4\pi t + \frac{\pi}{5}x - \pi) = (2k+1)\pi$，解得 $\varphi_2 = 2k\pi$，不妨取 $\varphi_2 = 0$

∴ 反射波方程 $y_2 = 3.0\cos(4\pi t - \frac{\pi}{5}x)$

（3）将各项参数代入驻波方程：$A = 3.0$，$\lambda = u \cdot T = 2\pi\frac{u}{\omega} = 10$，$\varphi_1 = -\pi$，$\varphi_2 = 0$

$$y_1 + y_2 = 6.0\cos(\frac{\pi}{5}x - \frac{\pi}{2})\cos(4\pi t - \frac{\pi}{2})$$

波腹位置 $\frac{\pi}{5}x - \frac{\pi}{2} = n\pi$，解得 $x = \frac{5}{2} + 5n$

A、B 之间说明 $0 \le x \le 5\text{m}$，因此波腹只有 $x = \frac{5}{2}\text{m}$

五　多普勒效应

· 波源与观察者之间产生相对媒质运动时，观察者接收到的频率 ν_R 将与波源原本的频率 ν_S 产生差异

多普勒效应
$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu_S$

v_R：观察者运动速度（以靠近波源为正）　v_S：波源运动速度（靠近观察者为正）　u：波速

解题思路　读题，搞清楚**谁是波源，谁是观察者，谁在运动，怎么运动**

例 1　（20–21，3）一个频率为 900Hz 的声源静止在空气中，设有一个大反射面正在以 $v = 50\text{m/s}$ 的速度接近声源，则反射面接收到的频率为________Hz，由反射面反射回来的声波波长为_________m。（设空气中的声速为 330m/s）

解　第一空：波源是声源，频率 $\nu_S = 900\text{Hz}$，不运动，因此 $v_S = 0$；

反射面是观察者，且在往声源处运动，因此 $v_R = 50\text{m/s}$

因此 $\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu_S = \frac{330 + 50}{330} \cdot 900 = 1036\text{Hz}$

第二空：反射面是声源，频率为它接收到的频率，向观察者运动，因此 $v_S = 50\text{m/s}$

没有指明观察者，说明假定了一个静止的观察者，因此 $v_R = 0$

因此 $\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu_S' = \frac{330}{330 - 50}\frac{330 + 50}{330}\nu_S = \frac{380}{280}\nu_S$

波长 $\lambda_R = \frac{u}{\nu_R} = 330 \cdot \frac{280}{380} / 900 = 0.27\text{m}$

例 2　（16–17，5）某汽笛静止时发出的声音频率为 1500Hz，当该汽笛离你而去并以速度 20m/s 奔向悬崖时，你听到的直接来自汽笛的声音频率为____________，你听到的由悬崖反射回来的声音频率为________。（取空气中的声速为 330m/s）

解　第一空：声源：汽笛（$\nu_S = 1500\text{Hz}$）　观察者：你

汽笛远离你运动，你静止，因此 $v_S = -20\text{m/s}$，$v_R = 0$

因此$\nu_R=\dfrac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S=\dfrac{330}{330+20}1500=1414.3\text{Hz}$

第二空：声源：悬崖（ν_S 未定）　观察者：你

悬崖和你都静止，因此你听到的就是悬崖发出的频率，也就是悬崖接收到的频率

现在求悬崖接收到的频率，则

声源：汽笛（$\nu_S=1500\text{Hz}$）　观察者：悬崖

汽笛向悬崖运动，悬崖静止，因此$v_S=20\text{m/s}$，$v_R=0$

因此$\nu_R=\dfrac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S=\dfrac{330}{330-20}1500=1596.8\text{Hz}$，也就是你听到的频率